Erich Weil

« Mathematische Logik und Logik der Mathematik »

Manuscrit transcrit et annoté par Alain Deligne

Présentation

Sa première matière secondaire étant la philologie allemande et l'histoire littéraire allemande moderne, Weil a passé son examen de seconde matière secondaire en mathématiques (option Analyse mathématique) chez le professeur Emil Artin (1898-1962) en 1928 à Hambourg[1], où ce dernier avait été nommé en 1926 Professeur de mathématiques. Vu que Weil le mentionne dans son *Curriculum vitae* de 1928 comme ayant été l'un de ses enseignants, il n'y alors aucun doute que c'est sous sa direction que le jeune Weil a fait cet exposé. La BEW possède en outre un cahier de notes prises par Weil à un cours d'algèbre donné à Hambourg par son professeur durant le semestre d'été 1926.[2] De renommée internationale, E. Artin avait travaillé, outre dans le domaine de l'algèbre, également sur la théorie des nombres. En 1934, il devient un professeur conformiste (comme d'ailleurs les deux autres professeurs germanistes de Weil, Petsch[3] et Petersen[4]) et signe le document intitulé *Bekenntnis an den deutschen Universitäten und Hochschulen und den nationalsozialistischen Staat* (Profession de foi en faveur des universités et établissements supérieurs ainsi qu'en faveur de l'État national-socialiste). Mais en 1937, il doit quitter l'Allemagne, sa femme étant juive.

---

[1] Voici le procès-verbal de son examen oral passé avec la mention « très bien » le 24 février 1928 : « Groupe de Galois. Automorphismes d'un corps, d'un dé. Géométrie. Extensions d'un corps. Idéaux. Domaines des classes restantes d'après ceux-ci. Divisibilité sans ambiguïté. » (cf. les documents que les Archives publiques de la ville de Hambourg nous ont aimablement autorisé à reproduire, *Staatsarchiv*, Kattunbleiche 19). On notera que c'est le mathématicien Richard Dedekind (1831-1916), professeur de mathématiques à l'Institut de technologie de Brunswick et plusieurs fois mentionné dans l'exposé, qui fut le premier à introduire les théories de Galois en Allemagne : il en fit le sujet d'un cours à Göttingen, étalé entre 1856 et 1858. Il y présentait Galois précisément comme étant un théoricien de l'extension des corps et de leur automorphisme. Dans sa monographie que Weil cite au début de son exposé, *Continuité et nombres irrationnels* (Brunswick, Vieweg & Sohn,1872), Dedekind définit pour la première fois le terme de « corps » (de nombres) comme un ensemble stable sur lequel on peut toujours opérer les quatre opérations fondamentales de l'addition, de la multiplication, de la soustraction et de la division.

[2] « Artin, *Algebra* » (propriété de l'IEW). A la suite du mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui, dans *Les fondements de la géométrie* (1899), avait construit un modèle algébrique de géométrie non archimédienne, E. Artin, ainsi qu'Otto Schreier (1901-1929), ont défini axiomatiquement une nouvelle discipline, « l'algèbre réelle ».

[3] Cf. notre Introduction in: Alain Deligne, « Sur la théorie de la catharsis » (en ligne sur le site de l'IEW).

[4] Cf. notre Introduction in: Alain Deligne, « La Fiancée de Corinthe » (en ligne sur le site de l'IEW).

Mathematische Logik und Logik der Mathematik[5]

In der Geschichte der Mathematik ist eine der auffälligsten Erscheinungen die Regelmäßigkeit, in der Epochen einer eigentlich vorwärts gerichteten Arbeit von solchen abgelöst werden, in denen man sich bemüht, die erreichten Resultate zu sichern. Gerade die letzte Zeit ist von den Versuchen einer solchen Sicherung erfüllt: ~~Gerade das Hauptergebnis der letzten hunderte Jahre,~~ Die sogenannte Arithmetisierung der Mathematik[6] hat dieses Bedürfnis in ganz besonderem Maße hervorgebracht. ~~die~~ Arbeiten von ~~Gauß~~, Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert, Russell, Couturat, Peano[7], um nur einige der Wichtigsten zu nennen, haben das Bestreben zu zeigen, wie die Mathematik in ihrem Bestande ~~und Begriff~~ gesichert **Γ** und logisch fundiert **/**[8] werden könne. Es sollen im Folgenden nicht die speziellen ~~Probleme~~ **Γ** Problemstellungen u[nd] Lösungen**/** dieser Forschungen behandelt werden. Es soll vielmehr gefragt werden, was eigentlich logische Sicherung der Mathematik bedeutet und versucht werden, festzustellen, wieweit eine Logik und eine Mathematik zusammengehören, und wieweit sie prinzipiell auseinanderfallen.

Gehen wir von einem konkreten Beispiel aus: die irrationale Zahl wird in der ganzen neueren Zeit unbedenklich verwendet. Erst in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts beginnt man zu fragen, was denn eigentlich diese irrationale Zahl sei, und mit welchem Rechte man sich ihrer bediene[9]. ~~Aber~~ – Es ist **Γ** übrigens **/** keineswegs nötig, dieses sozusagen klassische Problem aus der Grundlegung der Mathematik als Beispiel zu wählen. Man kann Begriffe, die auf den ersten Blick höchst unkompliziert sind, wie die des Bruchs, oder der negativen Zahl heranziehen. In der Tat **Γ** ist keineswegs auf den ersten Blick klar **/**, was es bedeutet, wenn wir von *–2* oder von ⅕ sprechen. – Man kann nur, ~~wie wir noch des Näheren sagen werden,~~ diese Begriffe verhältnismäßig leicht rechtfertigen, wenn die sogenannten natürlichen Zahlen angegeben sind, und man hat sich eine Zeit lang das Problem wirklich in dieser Richtung vereinfacht, indem man mit ~~dem alten~~ Kronecker sagte: die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles Übrige ist Menschenwerk[10]. Aber im Grunde ist – ~~selbst~~ gesetzt,

---

[5] Pour ce qui est de la transcription du manuscrit, on relèvera ici quelques particularités de la langue de Weil : il place souvent une virgule devant « und » ou « oder », que nous avons maintenue, et il écrit parfois « Russell » avec un seul « l » (orthographe rétablie).

[6] « Arithmétisation » était à l'époque une expression déjà en usage chez les historiens des mathématiques : elle signifie que l'analyse mathématique ne se faisait déjà plus sur des bases géométriques, mais arithmétiques.

[7] Sur tous ces mathématiciens, nous donnons les informations nécessaires au fur et à mesure qu'apparaissent à nouveau leurs noms et leurs ouvrages.

[8] Les mots précédés du crochet **Γ** étaient en marge et le report se termine à la barre transversale **/**.

[9] Vu que, depuis la théorie pythagoricienne des nombres, étaient apparus de nouveaux problèmes posés par l'univers des « grandeurs », pour la mesure desquelles il a fallu élargir le concept de nombre, on a été amené à découvrir les nombres dits « irrationnels ».

[10] La phrase se trouve mot pour mot dans une conférence que fit le mathématicien Leopold Kronecker (1813-1891) à l'Assemblée berlinoise des naturalistes; elle fut rapportée par H. Weber, *Leopold Kronecker*, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 2, 1893, p. 19. Notons que le susmentionné Georg

daß diese Ableitung aus der ganzen Zahl vollständig vorläge – damit das ~~eigentliche~~ Problem **Γ** wenigstens, wenn man es von der Seite der Logik sieht **/**, doch nur verschoben und die wesentliche Aufgabe, die Darstellung des Zahlbegriffs, in keiner Weise gelöst. So entstehen dann um die gleiche Zeit die Arbeiten von Dedekind und Frege, deren Grundgedanken auch heute noch maßgebend ~~geblieben~~ sind; denn die beiden Hauptrichtungen, die ordinale und die kardinale Theorie, in der letzten Zeit hauptsächlich vertreten von Peano[11] einerseits, Russell[12] andererseits sind ihrem wesentlichen Gehalt nach – bei allen bedeutenden und z. T. recht einschneidenden Reformen – **/ 2** [13] auf diese beiden zurückzuführen. – Die Dedekindsche Ableitung der Irrationalen Zahl hat zum Prinzip den Begriff des Schnittes[14]. Wenn man das System der rationalen Zahlen als stetig annimmt, und diese Stetigkeit **Γ** postuliert **/** ~~muß~~ Dedekind ~~postulieren~~ -, so definiert jede Zahl einem Schnitt derart, daß sämtliche irrationalen Zahlen in 2 Klassen geteilt werden können, in derer erster jedes Glied **Γ** kleiner **/** als diese Zahl ist, während die 2. die größeren enthält. Umgekehrt, und das eben ist im Postulat der Stetigkeit enthalten, soll eine und nur eine Zahl existieren, durch die ~~dieser~~ ein Schnitt hervorgebracht ist. Wird also bewiesen, daß √ 2 [15] keinem rationalen Wert entspricht, so ist damit, kraft unseres Stetigkeitspostulats, die Existenz einer neuen Zahl gezeigt, und durch den Schnitt ist es sehr leicht, die Bedingungen für Gleichungen und Angleichungen dieser irrationalen Zahlen untereinander und mit den rationalen Zahlen aufzustellen. Aber, könnte man hingegen sagen, und das hat z. B. Frege gesagt, diese Art, das Verlangte kraft Postulates herzustellen, ist wirlich einfach.

Cantor (1845-1918), qui élabora la théorie des ensembles durant les années 1874-1897, fut l’un de ses élèves. Mais il devint vite son adversaire, car selon lui, on peut expliquer les nombres naturels : ils ne sont donc pas d’origine divine

[11] Le mathématicien italien Guiseppe Peano (1858-1932) faisait dériver l’arithmétique de trois concepts fondamentaux (le zéro, le nombre et le successeur) et de cinq axiomes. Mais dans un tel système, les nombres naturels sont considérés comme quelque chose de déjà existant et les axiomes ne leur accordent pas de signification stable. C’est pourquoi le concept de nombre naturel doit être plus précisément circonscrit, et ce, en accord avec Frege qui définit les nombres naturels comme des ensembles d’ensembles.

[12] Bertrand Russell (1872-1970), *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, George Allen & Unwin, 1919 (*Einführung in die mathematische Philosophie*), *Introduction à la philosophie mathématique*. Avant-propos, notices et traduction par François Rivenc, Paris, Payot, 1991. Ce livre synthétise les résultats de deux ouvrages précédents : *Principles of Mathematics* (1903) et *Principia Mathematica* (1910-1913), écrit en commun avec Alfred North Whitehead (3 vol.).

[13] Nous signalons ainsi chaque début de feuillet.

[14] La méthode dite des coupures a été inventée par Dedekind dans la monographie que Weil cite plus loin, *Continuité et nombres irrationnels* (1872) : « Tout nombre rationnel a opère un partage du système R [= l’ensemble des nombres rationnels] en deux classes A^1 et A^2 telles que tout nombre a^1 de la première classe A^1 est plus petit que tout nombre a^2 de la deuxième classe A^2. » (§ 4. Création des nombres irrationnels). Mais il existe aussi une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par ces nombres. Chaque fois que Dedekind est en présence d’une telle coupure (A^1, A^2), il crée « un nouveau nombre α, un nombre irrationnel […] totalement défini par cette coupure. » (§ 4). Traduction dans Richard Dedekind, *La Création des nombres*, Paris, Vrin, 2008, pp. 74 et 77. Alors que le mathématicien russe Georg Cantor (1845-1918) parle encore de « grandeur irrationnelle », Dedekind est le premier à utiliser l’expression de « nombre irrationnel ».

[15] √2 est un nombre irrationnel algébrique.

Eben in diesem Schaffen der neuen Zahl liege der Kern der Sache. „Hier handelt es sich um die Frage", sagt er (*Grundges*[*etze*] § 139[16]), „ob ein ~~solches~~ Schaffen überhaupt möglich sei; ob es, wenn möglich, schrankenlos möglich sei, oder ob gewisse Gesetze beim Schaffen beachtet werden müssen. Im letzten Falle wäre erst zu beweisen, daß jenen Gesetzen gemäß die Berechtigung zum Schaffen bestünde, bevor man die Schöpfung vollziehen dürfte. Diese Untersuchungen fehlen hier vollständig, und damit fehlt die Hauptsache; es folgt das, wovon die Bündigkeit der Beweise abhängt, die mit Irrationalen Zahlen geführt werden". Sieht man jedoch genauer auf den Begriff von Zahl bei Dedekind, so läßt sich dieser Einwand heben (*Stetigkeit u[nd] irrationale Zahl[en]*, § 1): „Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zählens, an, und das Zählen ist nichts anderes als die sukzessive Schöpfung der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird."[17] ~~Der Anschein von Psychologismus hebt sich in der 2. Hälfte des Satzes von selbst auf.~~ In der Tat: bedeutet das Zählen als Grundhandlung nur die sukzessive Schöpfung einer unendlichen Reihe, deren Glieder durch weiter nichts als ihre Stelle, d.h. durch ihre Relation zu den übrigen bestimmt ~~ist~~ sind, so ist die Zahl auf den Begriff der ursprünglichen Ordnung reduziert, welcher Begriff zwar von jeder psychologischen Ableitung vorausgesetzt, aber als reine Denkfunktion niemals erreicht werden kann. Ist aber die natürliche ganze Zahl nur ein solcher Relationsterm[18], so ist gegen die Einführung neuer Terme, wofern sie widerspruchsfrei geschieht, kein Einwand zu erheben, wenn allerdings auch Frege zuzugestehen ist, daß die Darstellung Dedekinds zu Einwürfen in manchem herausfordert. ~~Aber~~

„Aber" sagt z.B. ~~Russell~~ Frege „mit alledem weiß ich nicht, was die Zahl ist." – Denn wenn er auch die Vorzüge der Dedekindschen Zahlendeutung anerkennt, ~~und~~ durchaus die Vorzüge seiner Theorie vor den psychologisierenden Theorien und vor allen Dingen vor den sogenannten formalen Theorien, z.B. von Heine[19] u[nd] Thomae[20], ~~die wir übrigens später in der Darstellung der **/ 3** Gilbertschen Lehre werden berücksichtigen müssen~~, sieht, so ist doch an dem ganzen Charakter seiner eigenen Begründung sehr deutlich, wie fern ihm die Dedekindsche Grundkonzeption, nämlich der Begriff der reinen Ordnung, seines Denkens **Γ** liegt **/**, wie man zwar in sehr undedekindschen Terminis, aber

[16] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, Hermann Pohl, vol. I, 1893, vol. II, 1903 (*Lois fondamentales de l'arithmétique*, non traduit). L'objection contre une construction du nombre de type kantien, qui réside dans l'affirmation que les jugements mathématiques sont synthétiques a priori. Consiste à dire que pour une construction il faut des règles.

[17] Alfred Dedekind*, Stetigkeit und irrationale Zahlen*, *op. cit*. Il faut ici particulièrement insister sur la notion d'acte créateur.

[18] La notion de « terme » signifie que l'on n'a pas à faire à des objets isolés, mais aux termes d'un système de relations qui font groupe ou ensemble.

[19] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), *Handbuch der Kugelfunktionen*, Berlin, Reimer, 1861.

[20] Carl Johannes Thomae (1840-1921), *Elementare Theorie der analytischen Fonctionen [sic] einer komplexen Veränderlichen*, Halle (Saale), 1880.

durchaus Dedekindschen Gedanken wohl sagen darf~~, liegt~~. Seine Definition hat nichts von diesem Ungewissen, das der ordinalen Bestimmung ~~zunächst anzuhaften~~ für ihn anzuhaften scheint. Für ihn und für Russell gibt es keine ursprüngliche Satzung des Denkens, sondern den Ausgangspunkt bilden im Gegensatze zu dieser ~~Willkür~~ **Γ** Unbestimmtheit **/**, wie sie es nennen würden, die Definitionen der einzelnen Zahlen, auf die dann die Ordnung ihrerseits wiederum, genau und logisch definiert, angewendet wird. – Wir gehen aus von dem Begriff der Gleichzahligkeit[21], dem der Menge und dem Begriff der Relation. Zunächst definieren wir (das Folgende nach Russell, *Einführung in die mathematische Philosophie* [22] und Couturat: *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik* [23]) die ein-eindeutige Beziehung[24]; sie liegt vor, wenn ein Element *x* ~~diese~~ eine Beziehung zu *y* hat und keine *x'* bzw. *y'* für sie eintreten, wenn also sowohl *x R y'* und *x' R y* falsch sind. Zwei Mengen sind nun ähnlich, wenn ihre Glieder sich einander uneindeutig zuordnen lassen, und *per definitionem* ist die Zahl einer Menge die Menge aller ihr ähnlichen Mengen. Hiermit ist zunächst die Möglichkeit gegeben, zu entscheiden, ob 2 Zahlen gleich oder ungleich sind. Gleich heißt identisch[25]; aber es ist bis hierhin unmöglich, das Ungleich [sic] in größer und kleiner zu spalten, da von Ordnung ~~bist jetzt~~ noch nicht die Rede war. Hierzu verwenden wir die Reihenbeziehung, d.h. Beziehungen, die aliorelativ[26], transitiv[27] und zusammenhängend[28] sind, mit anderen Worten, wenn die Beziehung *R* heißt, so ist *x R x* immer falsch, aus *x R y* und *y R z* folgt *x R z* und *R* muß auf jedes beliebig gewählte Paar unseres Bereichs Anwendung haben. Wenn wir ferner 1 als den Nachfolger von 0, 2 als den von 1 u.s.w. definieren, überhaupt allgemein die natürlichen Zahlen als die Nachkommenschaft der 0

---

[21] « Égalité numérique » serait certes plus élégant, mais *Gleichzahligkeit* est un néologisme formé par Frege à partir de *gleichzahlig*. Il entend par là une nouvelle fonction logique qui désigne une correspondance bi-univoque entre extensions de concepts. Exemple : dans une société monogame, le nombre d'époux est égal au nombre d'épouses. C'est-à-dire qu'ici un nombre a été identifié – Frege parle aussi de jugement de recognition –, alors qu'on est encore incapable d'assigner la place de ce nombre dans la suite naturelle des nombres. La définition du nombre cardinal est donc différente de celle de l'ordinal.

[22] Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique, op. cit*.

[23] Louis Couturat, *Les principes des mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*, Paris, Alcan, 1905 (éd. all. 1908).

[24] Pour l'allemand *ein-eindeutig*, on peut dire aussi « bijectif ».

[25] Weil semble confondre les deux : en effet, telle personne peut être dite identique à elle même, mais cette personne , envisagée comme relevant du genre humain, sera dite la même que les autres en relevant aussi, mais elle ne leur est pas identique pour autant.

[26] Le néologisme a été créé par C. S. Peirce. D'après Russell, une relation aliorelative « implique diversité, si aucun terme n'a cette relation avec elle-même. » (cf. Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit*., p. 87). « Époux de », « père de » sont par exemple des relations aliorelatives. De nos jours, on parlerait de relation « irréflexive » : on ne pas être son propre époux ni son propre père.

[27] Une relation transitive est une relation qui inclut son carré. Un ancêtre d'ancêtre est ainsi encore un ancêtre. Mais le père du père n'est pas père du petit-fils (toujours d'après Russell, *op. cit*., p. 88).

[28] On aurait attendu ici « connexe » (« étant donné deux point d'une droite, l'un doit être à gauche de l'autre. Une relation ayant cette dernière propriété est dite connexe », dit (Russell, *op. cit*., p. 87), mais Weil utilise le terme plus vague de *zusammenhängend* (cohérent ?).

hinsichtlich der Beziehung unmittelbarer Vorgänger fassen, so können wir sagen, eine induktive Zahl *m* heißt kleiner als eine andere *u*, wenn *u* jede übliche Eigenschaft des Nachfolgers von *m* besitzt. Hiermit ist die verlangte Größenordnung geschaffen, und da hier die natürliche Zahlenreihe erreicht ist, kann jetzt die Aufgabe ähnlich wie bei den übrigen Theoretikern behandelt werden, wenn auch Russell z.B. die Stetigkeit nicht zu postulieren braucht, sondern auf Grund einer Definition als Merkmal die Zahl einführen kann und so die Irrationalzahl als ein Segment in der Reihe der Brüche, das keine Grenze besitzt, darstellt.

Aber in dieser sogenannten ~~rein logisch~~ kardinalen Theorie stecken eigentümliche Schwierigkeiten. Betrachten wir die Definition der 1 in dieser Theorie (nach Couturat): „Wie wird man nun ausdrücken, daß eine Klasse *a* singulär ist, d.h. nur ein Individuum enthält (daß es nur ein *a* gibt)? Man wird zunächst ausdrücken **/4**, daß sie existiert (nie Null ist), und sodann, daß 2 beliebige Individuen, wenn sie ihr angehören, identisch sind. In Zeichen: $a - = \Lambda : x \,\varepsilon\, a \,.\, y \,\varepsilon\, a .\ ɘ_{x,y} .\ x \equiv y$. Hierin liegt gleichzeitig die logische Definition der Zahl 1, ebenso wie die Definition der 0 = Klasse die logische Definition der Zahl 0 ist. Und diese beiden Definitionen sind jedem Zirkelschluß entrückt, da sie nur die logischen Beziehungen 2, 3 und die der Identität und Verschiedenheit zwischen Individuen enthalten, wie wir sie weiter oben definiert haben“ (Couturat, S. 27). Hingegen wäre nun zunächst (nach Cassirer, *Substanzbegriff*, S. 65[29]) einzuwenden, daß in diesem Begriff des Individuums implizite ja schon der Begriff der Einheit steckt, und wenn man auch zugeben kann, daß in diesem Begriff die Einheit der Zahl 1 noch nicht begriffen sei, so ist doch zum mindestens die Fähigkeit, dieses und jenes als in Relation stehend zu begreifen, gefordert. Das ist aber nichts anderes als das Verfahren der ordinalen Lehre, die gerade hier, in der Reduktion der Peanoschen Grundsätze, auf die kardinale zurückgeführt werden sollte. Allerdings, ob nicht trotzdem diese Angleichung gegenüber der reinen ordinalen Theorie, wie sie z.B. Natorp, wohl am extremsten vertritt, einen notwendigen Schritt auf dem Wege der Begründung bedeutet, ist noch zu untersuchen. Vorher sei noch auf einen anderen Zusammenhang zwischen den beiden Begründungsmethoden hingewiesen. Wenn Frege und Russell vom Begriff der Gleichgültigkeit[30] ausgehen, und, wie oben gezeigt ist, von hier aus zunächst die einzelnen Zahlen, dann die Ordnung, konstruieren, so ist damit doch wohl das eigentlich erste Moment, nämlich die Ordnungsfunktion der Zahl, zu etwas Sekundären gemacht. Was bedeutet aber die Zahl vor der Ordnung? Man wird sich wohl dahin entscheiden müssen, daß hier einem ganz bestimmten Begriffe **Γ** von Logik **/** zu liebe [sic], der weiter unten genauer behandelt werden soll, den man aber, vorweggreifend, sehr nahe an die aristotelische Logik rücken kann, die ordinale Theorie

---

29 Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik*, Berlin, Verlag Bruno Cassirer, 1910 (Ernst Cassirer, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, trad. Caussat, Paris, Minuit, 1970).

30 Weil semble vouloir dire ici «équivalence », qui est une relation. C’est la raison pour laquelle on parle de classe d’équivalences.

abgelehnt worden ist[31]. Aber mit dem Nachweis, daß die Kardinaltheorie die Ordinaltheorie zur Voraussetzung hat, ist noch keineswegs erwiesen, daß die rein ordinale Theorie zur Begründung des Zahlbegriffs ausreicht. – Setzt man als Erstes, begründet in der ursprünglich synthetischen Einheit, die Relation und geht dann zu den Relationstermen über, so kann man zwar das eine, das andere, noch ein anderes, u.s.f. unterscheiden, aber damit ist nicht mehr gegeben als die Möglichkeit der Ordnung, und ob hier wirklich schon die Zahl vorliegt, ist zum mindestens zweifelhaft. Wenigstens sehe ich nicht, wie man von hier ohne Zuhilfenahme der Klassenlehre den Übergang von der Zahlstelle zur Zahl machen will. Daß Ordnungszahl und Anzahl[32] (gibt Natorp zu) ~~sind~~ beide „begrifflich verschieden sind, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zahlsetzung die Möglichkeit für die andere zugleich gegeben ist […][33] Indessen wo ein Erstes, da gibt es notwendig auch der Zahl nach Eines; es ist ja eben <u>ein</u> Erstes, <u>nur</u> eines; und wo ein Zweites, da gibt es (weil jedenfalls auch ein Erstes) notwendig Zwei, u. s. f.“ (*Grundlagen* 3, § 2)[34]. ~~Dagegen~~ Dazu ist nur das Eine zu sagen, daß dies gerade, was ja vermieden werden sollte, die mengentheoretische Begründung ist, bei der dieses Mal die Zahlstellen als die Mengen funktionieren. Es scheint also, daß beide Theorien aufeinander angewiesen sind: die eine reicht nicht aus, bis zur Zahl zu gelangen, die andere führt eben den Begriff der Zahl nicht genügend weit zurück. ~~Gerade~~

Gerade aber in dem, worin beide Theorien fehlen, wird am klarsten, was sie eigentlich beabsichtigen. Soll begründet werden, so heißt diese Begründung nichts anderes, als Zurückführung auf logisch einfachere Begriffe. Es ist klar, daß eine solche Zurückführung nicht ins Unendliche gehen kann **5/**. Man wird also bei einer gewissen Anzahl von Grundbegriffen und Grundsätzen stehen bleiben müssen. Sieht man aber auf die verschiedenen Systeme, die von den verschiedenen Mathematikern wie Peano, Russell, Hilbert aufgestellt sind, so ~~ist es ein völlig begreiflicher Anspruch des Denkens~~, erkennt man als unabwendbares Problem die Frage nach der Reduzibilität des Einen auf das Andere ~~zu erkennen~~. Man hat sich nur zu entscheiden, in welchem Sinne man diese Zurückführung verlangen kann. Von Begründung der Mathematik sprechen alle drei. Und daß es sich um eine logische Begründung ~~dem logischen Sinne~~ gegenüber irgendwelchen psychologischen oder sensualistischen Versuchen handelt, ist ohne weiteres klar[35]. Zu fragen ist nur, wie weit diese

---

[31] Nous avons reproduit le texte tel quel, mais il est évident qu'en l'état la phrase n'est pas syntaxiquement constructible.

[32] *Anzahl* est à prendre au sens de nombre cardinal.

[33] Les points de suspension sont de Weil.

[34] Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig/Berlin, Teubner, 1910 (*Les Fondements logiques des sciences exactes*, non traduit). Le § 2 du Troisième chapitre (« Zahl und Rechnung ») s'intitule « Ordnungszahl und Anzahl », où *Anzahl* est à prendre, comme chez Dedekind, au sens de nombre cardinal.

[35] Pour bien faire ressortir la volonté de pureté de la part de certains mathématiciens de la fin du XIX^e^ siècle, il n'est pas inutile de rappeler les insuffisances du sensualisme et du psychologisme en la matière. Selon par

Begründung ins rein Logische zurückgreift, und wie es sich mit der Identität oder ~~partieller Gleichheit~~ ~~Überdeckung~~ Abhängigkeit, die von Russell und Couturat ebenso wie von Natorp, allerdings von recht verschiedenen Standpunkten aus behauptet wird, verhält. Um zunächst von der Seite der Mathematik her eine Abgrenzung zu finden, wenden wir uns zu jener Form der Untersuchung, die im Gegensatz zu allen in der Hauptsache logisch orientierten Versuchen rein vom inneren Interesse der Mathematik ausgeht und auch keineswegs beansprucht, logisch Letztes außerhalb des mathematischen Beweises aufzufinden – nämlich der Axiomatik, wie sie Hilbert vertritt. „Es genügt nicht – das kann man vielleicht als Programm auffassen[36] – vorhandene Widersprüche zu vermeiden, wenn der dadurch hier gefährdete Ruf der Mathematik als Muster strenger Wissenschaft wiederhergestellt werden soll: die prinzipielle Forderung der Axiomenlehre muß vielmehr weitergehen, nämlich dahin, zu erkennen, daß jedes Mal innerhalb eines Wissensgebietes aufgrund des aufgestellten Axiomensystems Widersprüche überhaupt unmöglich sind“ (*Axiomatisches Denken*, S. 411; *Mathemat*[*ische*] *Annalen*, 78)[37]. Die Unmöglichkeit solcher Widersprüche zu zeigen, ist die Aufgabe eines Beweises, der aber, was Hilbert selbst sehr klar erkennt (*Logische Grundfragen der*

---

exemple le philosophe anglais Stuart Mill (1806-1873), « être un nombre » serait pour un objet une qualité comme celles d’être grand, coloré ou savoureux. Si j’arrive à former le concept de trois, c’est que j’aurai perçu dans l’espace trois petits pains. Cassirer a alors beau jeu de montrer les limites d’une telle conception : le nombre 753684 présenterait ainsi par rapport à son prédécesseur ou son successeur une démarcation aussi nette que le nombre trois par rapport à deux et à quatre : « Mais qui pourrait localiser l’impression qui distingue l’une de l’autre l’intuition propre à chacun des ensembles appréhendés ? » (cf. Ernst Cassirer, *Substance et fonction, op. cit.*, p. 43.). On ne peut donc généraliser l’expérience primitive de dénombrement. Il me faut en fait pouvoir construire déductivement le nombre. Mais avant de le faire, s’offrirait encore une autre possibilité. En effet, au lieu de faire dépendre les jugements arithmétiques des objets physiques, c’est à la « conscience » que pouvait revenir la tâche de constituer la source des concepts mathématiques. Entendu comme réalité psychique, le nombre serait alors purifié de toute matérialité. Mais en fait, nous avons là à faire à une simple modification de la position sensualiste, car ce qui se présente à notre psychisme n’est qu’une représentation dépendant à chaque fois de chaque individu et variant selon les circonstances. Un nombre ou une somme peuvent être accompagnés d’une représentation spatiale chez l’un, mais pas chez l’autre. Or, « 7 + 5 = 12 » est par exemple une représentation qui « n’a rien à voir avec un enchaînement quelconque de représentations vécues. » ((cf. Ernst Cassirer, *Substance et fonction, op. cit.*, p. 47). Depuis que le logicien allemand Gottlob Frege (1848-1925) s’était opposé à « l’arithmétique des petits pains et des cailloux » de Mill, le nombre n’était plus considéré comme la propriété de l’objet, mais comme celle d’un concept. L’exemple que cite Frege dans ses *Fondements de l’arithmétique* est connu : « Si je dis : le carrosse de l’Empereur est tiré par quatre chevaux, j’attribue le nombre quatre au concept : cheval qui tire le carrosse » (cf. Gottlob Frege, *Fondements de l’arithmétique*, op. cit.). Et Dedekind, qui suit une autre voie, est cependant également d’avis que le nombre est une émanation de la pure pensée. Et selon les principes mathématiques de Russell, de pures « constantes logiques » (relevées par Weil au feuillet **6**) suffisent à assurer le concept de nombre.

[36] Allusion à un projet de recherches en métamathématique qui sera connu plus tard sous le nom de „Programme de Hilbert“. Hilbert souhaitait que les mathématiques soient entièrement formulées au moyen de la logique.

[37] Fondée en 1868, la revue de Cletsch et Neumann, les Annales mathématiques, était à l‘époque la revue spécialisée la plus importante. Hilbert en était l’un des rédacteurs.

M[*athematik*], M. A. 88, S. 153 und *Neubegründung d*[*er*] *M*[*athematik*] 165[38]) nicht mehr der eigentlichen Mathematik angehört, sondern einer Wissenschaft, die er Metamathematik nennt. Der Hergang des Beweises ist nun kurz folgender: wir formalisieren den ganzen Bestand der Mathematik und weisen nach, daß wir, um zu sämtlichen Formeln zu kommen, mit einer bestimmten Anzahl von Sätzen auskommen, die alles Übrige wieder nach bestimmten Sätzen hervorbringen. Alle inhaltliche Überlegung ist aus der so formalisierten Mathematik herausgenommen und in das Gebiet der Metamathematik verlegt. – Man kann ~~tatsächlich~~ sagen, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit fast vollständig vorliegt – Das eigentliche Verfahren soll hier ~~eben~~ jedoch nicht geschildert werden. Aber betrachten wir das Axiomensystem, wie es in der vielleicht wichtigsten Veröffentlichung (*Math*[*ematische*] *Annal*[*en*]*,* 88) gegeben wird: die Gruppe IV, Axiomatik der Zahl: $a + 1 \neq 0$; $\delta\ (a + 1) = a$ zeigt mit völliger Deutlichkeit, auf was hier reduziert werden soll. Wenn ~~hier~~ in den letzten Sätzen der Begriff der Zahl vorausgesetzt wird, so ist vom mathematischen Standpunkt hingegen nichts einzuwenden. Denn tatsächlich, weist man der Mathematik nach, daß sie mit der Zahl, sofern sie sie gemäß diesen Axiomen faßt und verwendet, niemals in Widersprüche kommt, so ist damit jeder rein mathematische Anspruch vollkommen befriedigt. Man könnte mit gutem Recht sagen, daß damit eine mathematische Logik gegeben wird, wenn man sich entschließt, die Logik als die Summe derjenigen Sätze und Begriffe zu fassen, aus denen das System aller Sätze abzuleiten ist, wobei natürlich zuzugestehen ist, daß diese Summe zu keinem Moment absolut vollzählig ist, da ja irgendwelche Zufälligkeiten auf neue Sätze führen können, zu deren Begründung die Einführung neuer Axiome erforderlich ist. Aber da man immer wieder den Verträglichkeitsbeweis führen kann, liegt hierin keine prinzipielle und unüberwindliche Schwierigkeit. Nur die Frage z.B. Russells ist ~~prinzipiell~~ anders gestellt. Ihm handelt es sich nicht darum oder nur zum Teil darum, zu verhindern, daß die Mathematik sich in Widersprüche verwickele. Das eigentliche Ziel ist vielmehr, die Identität von Mathematik und Logik zu zeigen **6/**: die Logik ist die Jugend der Mathematik, die Mathematik das Mannesalter der Logik.[39] – Wenn trotzdem z.B. Natorp, der ja auch behauptet, daß die Mathematik rein aus dem Denken entspringe, gegen diese Identifikation sich verwahrt, so scheint es wichtig, den Sinn, den Russell und Couturat mit dem Terminus Logik verbinden, etwas genauer darzustellen.

---

[38] David Hilbert, « Neubegründung der Mathematik »*, Erste Mitteilung*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, t. I, 1922, pp. 157-177.

[39] Cette dernière phrase est une citation silencieuse de Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit*., pp. 231-232: « Au point de vue historique, les mathématiques et la logique ont fait l’objet d’études distinctes. […] Il est maintenant impossible de tracer une ligne de démarcation entre les deux; en fait les deux ne font qu’un. Elles diffèrent comme un enfant diffère d’un homme, la logique est la jeunesse des mathématiques et les mathématiques sont la virilité de la logique ». On fera remarquer ici que si Russell parle métaphoriquement de la logique et de la mathématique sans les définir, c’est qu’il est défend précisément une « logique mathématique », alors qu’on aurait pu attendre de Weil qu’il définisse dès le début de son exposé ce qu’il entend par logique et mathématique.

Es zeigte sich aber bei Hilbert und es ließe sich genauso gut von Peanos Axiomatik zeigen, daß die Mathematik zwar nur durch logisches Denken, aber ohne Zurückführung auf logische Grundlagen vor allen Widersprüchen und Paradoxien gesichert werden kann. Aber man braucht sich hiermit natürlich nicht zu begnügen. Man kann überdies versuchen, die Anzahl der Grundsätze und Grundbegriffe auf ein Minimum zu bringen, und zwar auf ein Minimum in einem anderen Sinne als Hilbert ~~oder Peano~~. Man kann z.B. mit Natorp nach den ursprünglichen Funktionen des Denkens fragen[40], aus denen Ordnung und Zahl entspringen, oder man kann mit Russell sich zum Problem machen, wie ich Zahl und Ordnung zu definieren habe und was zu dieser Definition erforderlich ist. Auf diese Weise werden natürlich Begriffe – und damit auch Grundsätze –, die bei Hilbert irreduzibel sind, zurückführbar, aber ~~zurückbar~~ zurückführbar auf etwas, das nicht mehr im mathematischen, sondern im metamathematischen Bereich liegt. ~~Aber~~ Solcher Art sind nun die Begriffe, auf die Russell und Couturat zuletzt alles stützen: die Begriffe der Menge, des Individuums, der Eigenschaft, der Einflußbeziehung zwischen Urteilen, von denen ausgegangen wird, sind keineswegs erste Begriffe im Sinne einer <u>transzendentalen</u> Logik. Sie sind erste Begriffe höchstens für eine Grundlegung der Mathematik, die ~~aber~~ nicht beanspruchen kann, logisch zu heißen, sobald man eine Logik des Ursprungs sucht. Aber das beanspruchen sie auch nicht. Denn der Begriff von Logik, der zu Grunde gelegt wird, ist zwar nicht der der aristotelischen, die hier vielmehr bedeutend ausgebaut und erweitert ist, aber es ist der Begriff einer formalen Logik. Russell stellt die Frage, was der Gegenstand sei, den wir auch Mathematik oder Logik nennen können und nennt als unmittelbare Charakteristik **Γ** des Gesuchten **/**, daß es sich nicht um spezielle Dinge und spezielle Eigenschaften handle, daß unser Ziel das formale Schließen sei, daß wir es mit der Form des Satzes zu tun haben, daß wir nach den bestimmten logischen Konstanten fragen u. dgl. m. In der Tat, wird Logik so gefaßt wie hier, dann ist keine Antwort auf die Frage nach der Grenze von Mathematik und Logik zu geben; denn von hier aus entwickeln sich wirklich die mathematischen Grundbegriffe stetig aus den logischen. – ~~Es ist nicht Aufgabe dieses Referats, die formale Logik als Lehre von den Formen des Denkens gegen eine andere, die von den Bedingungen der Gegenständlichkeit handelt, abzuwägen, nur muß der Unterschied~~ **Γ** Dieser Begriff von Logik muß jedoch **/** festgehalten werden, damit für die Wertung sinngemäße Grundlagen vorhanden sind. Wenn z.B. Aloys Müller (*D*[er] *Geg*[*enstand*] *d*[*er*] *Math*[*ematik*], S. 47)[41] vom Standpunkt Rickerts aus, ~~den man in gewissem Sinne transzendental~~

[40] Natorp vise en fait ce que Kant avait visé avec le concept de synthèse, mais Natorp trouve l’expression peu heureuse, car du fait qu’elle s’oppose à analyse, elle n’est pas dernière. Or, ce que poursuit Natorp, c’est une unité plus originelle, unité qui servirait de fondement à l’édifice logique (cf. *op. cit*., Chapitre I, § 6. « Das Prinzip des Ursprungs“, pp. 22-26).

[41] Aloys Müller, *Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie*, Braunschweig, Vieweg, 1922.

~~nennen mag~~, gegen Russell den Einwand erhebt, die Zahl sei bei ihm nicht aus logischen[42], sondern aus relationstheoretischen Begriffen abgeleitet, so wäre dieser Vorwurf für Russell schlechthin unverständlich. Die logische Begründung, die er geben will und in seinem Sinne auch verständlich gibt, macht keinen Anspruch darauf, irgendwelche letzte Begriffe im transzendentalen Sinne aufzuweisen. Ihre Leistung besteht vielmehr, und soll bestehen darin, daß eine Konstruktion der Zahl gemacht wird. Wenn man mit Müller sagt, die Zahl sei ein Gegenstand im homogenen Medium (was homogenes Medium ist, ist nicht weiter zu bestimmen) und trage quantitativen Charakter **7 /** (was Quantität sei, müsse man erlebt haben! [Rickert, S. 68[43]]), so ist das eine Fragestellung, die an sich – abgesehen von ihrer Haltbarkeit oder Unhaltbarkeit – mit der Russellschen Arbeitsweise nicht im mindesten kollidiert, ja man könnte sagen, die mit ihr überhaupt an keinem Punkte zusammenkommt. Denn auf der einen Seite will man Beschreibung, auf der andren Seite Konstruktion der Zahl.

Implizite ist damit unsere Frage nach den Grenzen von Logik und Mathematik beantwortet: auf jeden Fall ist ein fester Unterschied vom Standpunkt der formalen Logik nicht anzugeben. Aber wenn man sich Natorps *Logische Grundlagen*[44] ansieht, so scheint es, als ob auch vom Standpunkte der Ursprungslogik nicht zu sagen sei, wie weit die Logik geht und wo die Einzelwissenschaft anfängt. Denn hier wird ja gerade der Versuch gemacht, aus so rein logischen Begriffen wie dem Begriff der Relation, die Zahl, ja auch mehr die Zahlrelationen abzuleiten. Es wurde vorhin schon versucht, zu zeigen, daß die Art, in der diese Ableitung gegeben wird, Momente enthält, nämlich den Mengenbegriff, die als solche nicht benutzt werden. Aber man kann wohl noch weitergehen und fragen, ob tatsächlich schon mit den Begriffen des *Referentum* [sic] und *Relatum*[45] und der Relationseinheit aus beiden die ordinale Zahlreihe als solche gegeben ist, ob hier nicht vielmehr das transzendentale Motiv der Ordnung überhaupt in einem viel zu speziellen Sinn genommen ist. Abschließend mag gesagt werden, daß mathematische Begründung der Mathematik und logische

[42] Il pourrait s'agir de l'ouvrage *Das Eine, die Einheit und die Eins* de 1924, où le philosophe allemand Heinrich Rickert (1863-1936) affirme que le nombre n'est pas rédzuctible à des prémisses logiques, ce qui lui fait dire peut-être imprudemment qu'il est « alogique ». En fait, Rickert retient quand même un minimum logique représenté par les catégories de l'identité et de la différence, qui permettent de penser une objectivité.

[43] De quel ouvrage de Rickert s'agit-il ici ? On n'a trouvé nulle trace de cette formule, mais, si l'on s'appuie sur *Die Philosophie des Lebens. Darstellung und Kritik der philosophischen Modeströmungen unserer Zeit*, Tübingen, 1920, *System der Philosophie*, Tübingen, 1921, ou encore *Logique des sciences naturelles et logique de la culture* (Paris, Gallimard, 20??), l'idée est que pour Rickert la quantité, traitée mathématiquement, l'est de manière homogène, alors que tout *quantum* est dans la vie réelle vécu comme hétérogène.

[44] Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, *op. cit*.

[45] La classe des maris est disjointe de celle des épouses. Dans ce cas, on peut considérer un terme comme l'un de ceux dont part la corrélation ou bien comme l'un vers lequel elle va. Le *référent* désigne l'objet dont part la relation et le *relatum* l'objet vers lequel elle va. Ainsi, si *x* est le mari et *y* la femme, *x* est le *référent* et *y* le *relatum* relativement à la relation « mari de », mais par rapport à « épouse de », c'est *y* le *référent*, *x* le *relatum* (cf. Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit*., p. 113).

Begründung einander, sofern sie richtig gefaßt werden, weder widerstreiten noch Konkurrenz machen. Die Logik wird sich darauf zu beschränken haben, die Bedeutung der Zahl im Funktionalsystem des Denkens aufzuzeigen und Begründung der Mathematik wird für sie nur heißen können, dieser Funktion ihre Stelle anzuweisen. Die Begründung im Sinne der technischen Sicherung und des Tatsächlichen, d.h. der Einzelheiten schaffenden Konstruktion wird man der Mathematik selbst überlassen müssen[46].

Fragen ~~betrachten~~ wir ~~aber~~ jetzt nochmals ~~die Frage der~~ nach der Reduzibilität der verschiedenen Begründungen, so ist mit dem bis hierher Gesagten die Verwirrung scheinbar aufs äußerste gekommen: zwei Arten von Logik geben zwei Arten von Grundlegung, und jede hat die andere, um ihr Ziel zu erreichen, nötig. Die kardinale Theorie setzt im Begriffe der einen und der anderen Mengenglieder, der einen und der anderen Menge den Begriff der Ordnung voraus – die ordinale Theorie benutzt, um von der Ordnungslehre zur Zahl zu kommen, die Menge. – Eines ist auf jeden Fall als das gemeinsame Ziel beider klar: der Begriff der Zahl soll rein aus dem Denken[47], nicht durch Stützung auf irgendeine Empirie des Raumes, der Dinge, der psychischen Akte oder anderer Gegebenheiten erzeugt werden. Aber eben dies gemeinsame Ziel gibt die Möglichkeit der Beurteilung. Wurde vorhin die Russellsche Logik formal genannt, so läßt sich eine Ergänzung dieser Charakterisierung geben: sie ist ihrem Wesen nach Abstraktionslogik. Der Begriff der Zahl wurde aus dem der Gleichzahligkeit abstrahiert – aber gilt hier nicht der Einwand, der gegen jede Abstraktionstheorie zu erheben ist, daß ~~die~~ der Bezugspunkt auf den hin abstrahiert wird, vorgegeben sein muß ? In der Tat muß es als Gewaltsamkeit bezeichnet werden, wenn man zunächst von dem absieht, was das Wesen der Zahl ausmacht – der Systemordnung, und zunächst etwas konstruiert, das als Eigen **8/** -schaft von Mengen auftritt, und von dem niemand sagen könnte, was es wäre, wenn nicht der Name Zahl in der Definition aufträte. Es ist unfraglich, daß hier die Definition in einer Art aufgefaßt wird, die sie in ihrer Brauchbarkeit einschränkt. Gewiß, wenn definieren heißt, einen unbekannten Begriff durch bekannte, die in bekannten Relationen stehen, auszudrücken, so ist hier alles wohlbestimmt, und wenn ~~wahre~~ Objektivität des Begriffs in der Übereinstimmung mit dem Gegenstand liegt, so sind diese Begriffe, da sie ja von den Gegenständen abstrahiert sind, objektiv. Aber gerade die Mathematik bildet die gewichtigste Instanz gegen diese Auffassung des Begriffs, gerade am mathematischen Begriff zeigt sich die Verfehltheit des Fortlassens der Merkmale, denn hier ist gerade der weitere Begriff der Inhaltsreichere, wie z.B. in der reellen Zahl rationale und irrationale beide vollständig enthalten sind. Und implizite gibt Russell selbst das zu, wenn ihm die

---

[46] Tout le paragraphe que l’on vient de lire à partir donc de „implizite“ est en fait barré par une ligne transversale.

[47] Cette conception est proche de celle de Gauß : « Le nombre est un pur produit de notre esprit » (Lettre à Bessel du 8 avril 1830).

Menge durch eine Eigenschaft definiert ist. Was damit gefordert und anerkannt ist, ist nichts anderes als der Ursprungsbegriff. Denn gibt man für die Menge zu, daß die Eigenschaft nicht vom Ding ~~erzeugt~~ abstrahiert ist, daß vielmehr die Denkfunktion den Gegenstand erzeugt, so ist nicht einzusehen, warum man die Berechtigung ~~für~~ dieses Gedankens für die Konstruktion der Zahl bestreitet. Was nämlich Dedekind gibt, ist ~~nichts~~ eben dies, daß das System der Zahlen das System der Ordnung ist – Unterschiedenheit und Ordnung sind die Grundmomente, die alles andere in sich enthalten, und, weit entfernt, daß die Zahlen etwas bräuchten, aus dem sie zu abstrahieren wären, genügt die Form, in der sie sich gegenseitig ihre Stelle anweisen, um ihren Sinn zu beschreiben. – Für die <u>logische</u> Grundlegung der Mathematik bedeutet das Folgende: es kommt nicht darauf an, Abstraktionsbegriffe zu bilden und Definitionen aus denen man nachher das herausholt, was man vorhin hineingetan hat, sondern die Aufgabe ist, die Funktionen aufzuweisen, aus denen die Begriffe entspringen und ihre Objektivität dadurch zu erhärten, daß man ihre Bedeutung und Leistung im System der Wissenschaft nachweist. Allerdings hat die Logik damit nicht die <u>mathematische</u> Grundlegung zu vollziehen, die ihrem ganzen Wesen nach andere Aufgaben zu erfüllen hat; denn wenn der Ausgangspunkt das Faktum der Wissenschaft ist, so kann in dieser Selbstbesinnung nicht das Material gesehen oder geändert werden – es können nur die Richtungen und die Schichten der Objektivität gekennzeichnet werden, damit aber, daß die technische Konstruktion, wenn man das Wort gebrauchen darf, der Arbeit der Wissenschaft überlassen werde, erkennt man an, daß zwei Richtungen der Begründung möglich und berechtigt sind. Ob die ordinale oder die kardinale Theorie für die Mathematik brauchbarer sind, ist eine mathematische Frage – von Seiten der Logik ist nur zu sagen, daß der Funktionsbegriff, wie ihn die Dedekindsche Ableitung benutzt als wahrhaft ursprünglicher und der mengentheoretischen zugrunde gelegt werden muß, falls sich die Mathematik, wie es scheint, für diese entscheidet – nur so wird man mit Recht von logischer Grundlegung sprechen können.