Erich Weil

Logique mathématique et logique des mathématiques

Traduit de l'allemand par Alain Deligne

Dans l'histoire des mathématiques, l'un des phénomènes les plus frappants est la régularité avec laquelle des époques où le travail s'oriente à vrai dire vers l'avant sont relayées par d'autres où l'on s'efforce de garantir les résultats atteints. Ces derniers temps abondent justement en essais visant à une telle garantie. ~~Justement le résultat principal des cent dernières années.~~ Ladite arithmétisation des mathématiques[1] a très largement engendré ce besoin. Des travaux de ~~Gauss,~~ Dedekind, Frege, Cantor, Hilbert, Russell, Couturat, Peano[2], pour ne nommer que quelques-uns parmi les plus importants, s'efforcent de montrer comment les mathématiques peuvent être garanties dans leur fonds ~~ainsi que dans leurs concepts~~ **Γ** et être fondées logiquement **/**[3]. Dans ce qui suit, on ne traitera pas des ~~problèmes~~ **Γ** problématiques particulières de ces recherches ni des solutions qui leur ont été apportées **/**. On se posera au contraire la question de savoir ce que signifie à vrai dire la garantie logique des mathématiques et on tentera d'établir dans quelle mesure une logique pure et une mathématique pure[4] sont faites l'une pour l'autre et dans quelle mesure elles se séparent quant aux principes.

Partons d'un exemple concret : dans toute l'époque récente, on utilise sans hésiter le nombre irrationnel. C'est seulement à partir de la deuxième moitié du XIX[e] siècle que l'on commence à se demander ce qu'est donc à vrai dire ce nombre irrationnel et de quel droit

---

[1] « Arithmétisation » était à l'époque une expression déjà en usage chez les historiens des mathématiques : elle signifie que l'analyse mathématique ne se faisait déjà plus sur des bases géométriques, mais arithmétiques (cf. notre Introduction). Weil a certes barré le nom de Gauss, mais celui-ci appelait déjà l'arithmétique la reine des mathématiques.

[2] Sur tous ces mathématiciens, nous donnons les informations nécessaires au fur et à mesure qu'apparaissent à nouveau leurs noms et leurs ouvrages. (cf. néanmoins aussi notre Introduction).

[3] Les mots précédés du crochet **Γ** étaient en marge et le report se termine à la barre transversale **/**. Nous procédons ainsi pour la suite. Quant à chaque nouvelle page, elle est signalée ainsi : **2 /**.

[4] Logique et mathématique sont ici prises dans leur pureté, non pas tant au sens où elles seraient indépendantes de leur application (ce qui serait tout à fait dans l'esprit de Russell) que dans le sens exposé dans notre Présentation.

on l’utilise[5]. ~~Mais~~ Il n’est **⌈** du reste **/** pas du tout nécessaire de choisir comme exemple ce problème pour ainsi dire classique du fondement des mathématiques. On peut se servir de concepts qui, à première vue, ne sont pas du tout compliqués, comme celui de fraction ou de nombre négatif. En fait, ce que signifie parler de – *2* ou de ⅕ n’est à première vue pas du tout évident. – On peut seulement~~, comme nous le préciserons encore,~~ justifier assez facilement ces concepts si sont donnés les nombres qu’on appelle naturels, et, dans cette direction, on s’est pendant un certain temps vraiment simplifié la tâche en disant avec ~~le vieux~~ Kronecker : « Dieu a créé les nombres entiers, et tout le reste est l’œuvre de l’homme »[6]. Mais au fond – à supposer ~~même~~ que cette déduction à partir du nombre entier fût complète – le ~~vrai~~ problème, **⌈** du moins si on le considère du côté de la logique **/**, n’est cependant par là que repoussé et la tâche essentielle, l’exposition du concept de nombre, n’est en aucun cas résolue. C’est ainsi qu’apparaissent à la même époque les travaux de Dedekind et de Frege dont les idées fondamentales sont ~~restées~~ de nos jours encore déterminantes, car les deux courants principaux, la théorie ordinale et la théorie cardinale, représentés ces derniers temps principalement par Peano[7] d’un côté et Russell[8] de l’autre, doivent, selon leur contenu essentiel – malgré toutes les réformes importantes et en partie

---

[5] Vu que depuis la théorie pythagoricienne des nombres étaient apparus de nouveaux problèmes posés par l’univers des « grandeurs », pour la mesure desquelles il a fallu élargir le concept de nombre, on a été amené à découvrir les nombres dits « irrationnels ».

[6] La phrase se trouve mot pour mot dans une conférence que fit le mathématicien Leopold Kronecker (1813-1891) à l’Assemblée berlinoise des naturalistes; elle fut rapportée par H. Weber, *Leopold Kronecker*, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2, Berlin, Georg Reimer, 1893, p. 19. C’était l’idée défendue par le mathématicien Karl Weierstrass (1815-1897) que l’on pouvait tout fonder sur les seuls nombres entiers, dit « naturels » parce que fournis par la nature (ici, par le Bon Dieu). Mais comme le dit juste après Weil, la question du statut du nombre n’en est pas pour autant résolue.

Notons encore que le mathématicien russe susmentionné Georg Cantor (1845-1918), qui élabora la théorie des ensembles durant les années 1874-1897, fut un élève de Kronecker.

[7] Le mathématicien italien Guiseppe Peano (1858-1932), dans son opuscule *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Turin, Bocca, 1889), faisait dériver l’arithmétique de trois concepts fondamentaux (le zéro, le nombre et le successeur) et de cinq axiomes. Mais dans un tel système, les nombres naturels sont considérés comme quelque chose de déjà existant et les axiomes ne leur accordent pas de signification stable. C’est pourquoi le concept de nombre naturel doit être plus précisément circonscrit, et ce, en accord avec Frege qui définit les nombres naturels comme des ensembles d’ensembles.

[8] Bertrand Russell (1872-1970), *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, George Allen & Unwin, 1919 (*Introduction à la philosophie mathématique*. Avant-propos, notices et traduction par François Rivenc, Paris, Payot, 1991). Ce livre synthétise les résultats de deux ouvrages précédents : *The Principles of Mathematics* Cambridge, University Press, 1903, et *Principia Mathematica* (1910-1913), écrit en commun avec Alfred North Whitehead (3 vol.).

tout à fait décisives – être ramenés à ces deux auteurs **2 /**.[9] – La déduction dedekindienne du nombre irrationnel a pour principe le concept de coupure[10]. Si l'on pose le système des nombres rationnels comme continu, et Dedekind ~~doit postuler~~ postule cette continuité, chaque nombre définit alors une coupure faisant que tous les nombres irrationnels peuvent être répartis en deux classes dans la première desquelles chaque membre est plus petit que ce nombre, tandis que la deuxième comprend les plus grands. Inversement, et cela précisément est contenu dans le postulat de la continuité, ne doit exister qu'un seul et unique nombre par lequel s'opère ~~cette~~ une coupure. Si on démontre ainsi que $\sqrt{2}$ [11] ne correspond pas à une valeur rationnelle, on montre par là, en vertu de notre postulat de continuité, l'existence d'un nouveau nombre et, grâce à la coupure, il est très facile d'établir les conditions d'équations et d'harmonisations de ces nombres irrationnels entre eux ainsi qu'avec les nombres rationnels. Mais on pourrait par contre dire, et c'est ce qu'a p. ex. fait Frege, que cette manière de produire ce qui est exigé en vertu du postulat est réellement simple. Et c'est justement dans cette création du nouveau nombre que se trouverait le fin fond des choses. « Il s'agit ici, dit-il (*Lois fond*[*amentales*], § 139 [12]) de la question de savoir si une ~~telle~~ création est seulement possible ; et si elle est possible, l'est-elle alors sans limite,

---

[9] Frege accorde effectivement la priorité au nombre cardinal, qu'il définit comme l'extension d'un concept (cf. *Les Fondements de l'arithmétique*. *Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*, traduction et introduction de Claude Imbert, Paris, Seuil, 1969). Dès qu'il y a équivalence numérique, on peut identifier un nombre sans qu'on soit capable d'indiquer son emplacement dans la série des nombres. Ce qui est p. ex. le cas quand on dit que dans une société monogame le nombre des époux est égal au nombre des épouses. L'ordre ne suffit donc pas à définir le nombre. Dedekind, lui, partait des nombres naturels, qu'il identifiait avec les ordinaux. Le nombre cardinal est pour lui une notion dérivée des ordinaux, lesquels doivent être définis à partir de 1 et de l'adjonction de 1. Le successeur s'applique ainsi à un premier élément qui n'est pas lui-même un successeur.

[10] Pour « Schnitt », la traduction consacrée est « coupure », bien que dans son article en français « Sur la théorie des nombres entiers algébriques », Dedekind ait avalisé « section » (in : Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11, Gauthier-Villars, 1876, pp. 178-288, ici p. 284). La méthode dite des coupures a été inventée par Dedekind dans sa monographie que Weil cite plus loin, *Continuité et nombres irrationnels* (1872) : « Tout nombre rationnel a opère un partage du système R [= l'ensemble des nombres rationnels] en deux classes A^1 et A^2 telles que tout nombre a^1 de la première classe A^1 est plus petit que tout nombre a^2 de la deuxième classe A^2. » (§ 4. Création des nombres irrationnels). Mais il existe aussi une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par ces nombres. Chaque fois que Dedekind est en présence d'une telle coupure (A^1, A^2), il crée « un nouveau nombre α, un nombre irrationnel […] totalement défini par cette coupure. » (§ 4). Traduction in : Richard Dedekind, *La Création des nombres* (Introduction, traduction et notes par Hourya Benis Sinaceur), Paris, Vrin, 2008, pp. 74 et 77. Alors que Cantor parle encore de « grandeur irrationnelle », Dedekind est le premier à utiliser l'expression de « nombre irrationnel ».

[11] $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel algébrique.

[12] Gottlob Frege, *Lois fondamentales de l'arithmétique*, Jena, Hermann Pohl, vol. I, 1893, vol. II, 1903 (non traduit).

ou faut-il observer certaines lois lors de la création. Dans ce dernier cas, il faudrait d'abord prouver que, conformément à ces lois, serait donné le droit de créer avant qu'on ne puisse effectuer la création. Ces recherches font ici entièrement défaut et manque ainsi l'essentiel. S'en suit ce dont dépend la force concluante des preuves fournies avec les nombres irrationnels ». Si l'on considère cependant de plus près le concept de nombre chez Dedekind, cette objection peut être levée (*Continuité et nombres irrationnels*, § 1 [13]) : « Je vois l'Arithmétique entière comme une conséquence nécessaire, ou du moins naturelle, de l'acte arithmétique le plus simple : compter, et compter même n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs, dans laquelle chaque individu est défini par son prédécesseur immédiat. »[14] ~~L'impression de psychologisme disparaît d'elle-même dans la deuxième moitié de la phrase~~. Effectivement, si compter comme acte fondamental signifie seulement créer successivement une suite infinie dont les membres ~~n'est~~ ne sont déterminés par rien d'autre que par leur place, c.-à-d. par leur relation aux autres, le nombre est alors réduit au concept de l'ordre originel, concept qui est certes présupposé par toute déduction psychologique, mais qui ne peut jamais être atteint comme pure fonction de la pensée. Mais si le nombre entier naturel n'est qu'un tel terme de relation[15], on ne peut soulever d'objection contre l'introduction de nouveaux termes, à condition que celle-ci soit exempte de contradiction, quand bien même il faille concéder à Frege que l'exposition de Dedekind suscite des objections sur plus d'un point. ~~Mais~~,

« Mais, dit p. ex. ~~Russell~~ Frege, avec tout cela, je ne sais pas ce qu'est le nombre »[16]. – En effet, même s'il reconnaît les avantages de l'interprétation dedekindienne des nombres et entièrement les avantages de sa théorie par rapport aux théories psychologisantes ainsi qu'avant tout par rapport aux théories dites formelles, p. ex. de Heine[17] et de Thomae[18],

[13] *Op. cit*. par Weil (cf. *infra*). Il faut particulièrement insister ici sur la notion d'acte créateur.

[14] Je reprends ici la traduction qu'on trouve dans : Richard Dedekind, *La Création des nombres*, *op. cit*., p. 62.

[15] La notion de « terme » signifie que l'on n'a pas à faire à des objets isolés, mais aux membres d'un système de relations qui font groupe.

[16] Le remplacement du nom de Russell par celui de Frege s'explique du fait que Russell lui-même disait que la mathématique était une « science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai » (cité par Couturat, *op. cit*., p. 4). La phrase en question de Frege, que Weil semble citer de mémoire, serait la suivante : « Notre science peut-elle souffrir sans honte d'être si peu éclairée sur son objet le plus proche, et apparemment le plus simple ? Encore bien moins saurait-on dire ce qu'est le nombre. » (*Les Fondements de l'arithmétique*, *op. cit*., Introduction, II).

[17] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), *Handbuch der Kugelfunktionen*, Berlin, Reimer, 1861.

~~qu'il nous faudra du reste considérer plus tard en exposant~~ **3 /** ~~la théorie de Hilbert~~, on voit pourtant très clairement au caractère entier de son propre fondement combien, en vertu de la pensée pure, la conception fondamentale de Dedekind, à savoir le concept d'ordre pur, **Γ** lui est **/** étrangère, s'il est permis de le dire en des termes certes très peu dedekindiens, mais correspondant tout à fait aux idées dedekindiennes. Sa définition n'a rien de toute cette incertitude qui semble ~~d'abord être inhérente~~ être inhérente, selon lui, à la définition ordinale. Pour lui comme pour Russell, il n'y a pas de statut originaire de la pensée mais, en opposition à ~~cet arbitraire~~ **Γ** cette indétermination **/**, comme nous l'appellerions, ce sont les définitions des nombres particuliers qui forment le point de départ ; définitions auxquelles s'applique alors à nouveau de son côté l'ordre, exactement et logiquement défini. – Nous partons du concept d'équinuméricité[19], de celui d'ensemble et du concept de relation. Nous définissons d'abord (ce qui suit : d'après Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, et Couturat, *Les principes philosophiques de la mathématique*) la relation une et univoque : elle se présente quand un élément *x* possède ~~cette~~ une relation à *y* et qu'aucun *x'* ou *y'* ne peuvent le remplacer, quand sont donc faux aussi bien *x R y'* que *x' R y*. Or, deux ensembles sont semblables si on peut ramener leurs membres l'un à l'autre de manière non équivoque, et *per definitionem*, le nombre d'un ensemble est l'ensemble de tous les ensembles qui lui sont semblables. Est d'abord donnée ici la possibilité de décider si deux nombres sont égaux ou inégaux. Égal signifie identique ; mais il est jusqu'ici impossible de scinder l'inégal en plus grand et plus petit, puisque ~~jusqu'à maintenant~~ il n'a pas encore été question d'ordre. Pour cela nous employons la relation sérielle, c.-à-d. des relations qui sont aliorelatives[20], transitives[21] et connexes[22] ; en d'autres termes, si la relation s'appelle *R*,

[18] Carl Johannes Thomae (1840-1921), *Elementare Theorie der analytischen Fonctionen [sic] einer komplexen Veränderlichen*, Haale (Saale), 1880. Frege s'est montré très polémique particulièrement envers ce collègue mathématicien. Qu'on en juge p. ex. par ce titre : « Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen. Schlußbemerkung », in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (cf. revue citée), 17, 1906, pp. 52-56.

[19] *Gleichzahligkeit* est un néologisme formé par Frege à partir de *gleichzahlig*. Il entend par là une nouvelle fonction logique qui désigne une correspondance bi-univoque (de un à un) entre extensions de concepts (cf. § 68 des *Grundlagen der Arithmetik*, 1884). Exemple : dans une société monogame, le nombre d'époux est égal au nombre d'épouses. C'est-à-dire qu'ici un nombre a été identifié – Frege parle aussi de jugement de recognition –, alors qu'on est encore incapable d'assigner la place de ce nombre dans la suite naturelle des nombres. La définition du nombre cardinal est donc différente de celle de l'ordinal.

[20] Le terme *aliorelative* a été créé par l'Américain Charles Saunders Peirce (1839-1914), qui l'opposait à *selfrelative*. D'après Russell, une relation aliorelative « implique diversité, si aucun terme n'a cette

$x\ R\ x$ est alors toujours fausse et de $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$ résulte $x\ R\ z$, et *R* doit trouver à s'appliquer à chaque couple choisi arbitrairement dans notre domaine. Et si en outre nous définissons 1 comme le successeur de 0, 2 comme celui de 1, et ainsi de suite, si nous concevons très généralement les nombres naturels comme les successeurs de 0 pour ce qui est de la relation à ceux qui précèdent immédiatement, nous pouvons affirmer qu'un nombre inductif *m* sera dit plus petit qu'un autre *u*, si *u* possède chaque propriété habituelle du successeur de *m*. Par là est créé l'ordre de grandeur exigé, et puisqu'est atteinte ici la suite naturelle des nombres, la tâche peut maintenant être effectuée de la même manière que pour les autres théoriciens, même si Russell n'a p. ex. pas besoin de postuler la continuité, mais qu'il peut, sur la base d'une définition par critère, introduire le nombre et présenter ainsi le nombre irrationnel comme un segment dans la suite des fractions, segment qui ne possède pas de limite.

Mais en cette théorie dite ~~purement logique~~ cardinale se nichent des difficultés propres. Considérons la définition du 1 dans cette théorie (d'après Couturat) : « Comment exprimera-t-on […] qu'une classe *a* est singulière, c'est-à-dire ne contient qu'un individu (qu'il n'y a qu'un *a*) ? On exprimera, d'abord, **4 /** qu'elle existe (n'est pas nulle), et ensuite, que si deux individus lui appartiennent, ils sont identiques. En symboles : $a - =_{\wedge} : x\ \varepsilon\ a.\ y\ \varepsilon\ a.\ ɘ_{x,\,y}.\ x \equiv y$. C'est là, en même temps, la définition logique du nombre 1, de même que la définition de la classe nulle est la définition logique du nombre 0. Et ces deux définitions sont exemptes de tout cercle vicieux, car elles n'impliquent que les relations logiques ε, ɘ, et les relations d'identité et de diversité entre individus, que nous avons définies ci-dessus. » (Couturat, p. 27)[23]. Or, là-contre, il faudrait d'abord objecter (d'après Cassirer, *Concept de substance*, p.

relation avec elle-même. » (cf. *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit.*, p. 87). « Époux de », « père de » sont par exemple aliorelatives. On dit aujourd'hui plutôt « irréflexif ».

[21] Une relation transitive est une relation qui inclut son carré. Un ancêtre d'ancêtre est ainsi encore un ancêtre. Mais le père du père n'est pas père du petit-fils (toujours d'après Russell, *op. cit.*, p. 88).

[22] La troisième relation associée aux deux autres est dite « connexe » d'après la définition suivante de Russell : « Étant donné deux point d'une droite, l'un doit être à gauche de l'autre. Une relation ayant cette dernière propriété est dite connexe » (*op. cit.*, p. 87).

[23] Louis Couturat, *Les principes des mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*, Paris, Alcan, 1905 (éd. all. 1908). La citation se trouve en fait à la page 26. Couturat traduit fidèlement *null-class*, qui désigne pour Russell la classe ne contenant aucun élément. Mais aujourd'hui, on dit plutôt « ensemble vide ».

65 et suivantes[24]) qu'implicitement le concept d'unité se trouve déjà en fait dans le concept d'individu et que, même si on peut concéder que l'unité du nombre 1 n'est pas encore comprise dans ce concept, est cependant pour le moins exigée la faculté de concevoir celui-ci ou celui-là comme se trouvant dans une relation. Mais cela ne constitue rien d'autre que la méthode de la théorie ordinale, qui justement ici, dans la réduction des principes de Peano, devrait être ramenée à la théorie cardinale. Toutefois, il faut encore examiner si cette dissolution par rapport à la pure théorie ordinale, telle que p. ex. Natorp la défend de la manière la plus extrême, ne représente cependant pas une étape nécessaire sur la voie du fondement. Mais avant, on indiquera encore un autre rapport entre les deux méthodes de fondement. Si Frege et Russell partent du concept d'équinuméricité et si, comme on l'a montré ci-dessus, ils construisent à partir de là d'abord les nombres particuliers, puis l'ordre, on fait de ce qui est assurément à vrai dire le premier moment, à savoir la fonction ordinale du nombre, quelque chose de secondaire. Mais que signifie poser le nombre avant l'ordre ? Il faudra bien se décider pour le fait que la théorie ordinale a été repoussée en vertu ici d'un concept bien particulier **Γ** de logique**/**, qui devra être traité plus précisément ci-dessus, mais que l'on peut, pour anticiper, rapprocher de très près de la logique aristotélicienne. Mais en prouvant que la théorie cardinale présuppose la théorie ordinale, on n'a encore en rien établi que la pure théorie ordinale suffit pour fonder le concept de nombre. – Si l'on pose la relation comme élément premier, fondé dans l'unité originellement synthétique, et que l'on passe ensuite aux termes de la relation, on peut certes distinguer ainsi un élément, un autre, et encore un autre et ainsi de suite, mais par là n'est rien donné de plus que la possibilité de l'ordre, et l'on peut pour le moins douter que se présente déjà ici réellement le nombre. Je ne vois du moins pas comment à partir de là on veuille effectuer, sans avoir recours à la théorie des classes[25], le passage de la place du nombre au nombre. Le fait que nombre

---

[24] Ernst Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik*, Berlin, Verlag Bruno Cassirer, 1910 (Ernst Cassirer, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, trad. Caussat, Paris, Minuit, 1970, p. 66 sq, où Cassirer suit en fait Russell : « Que tout individu […] soit en un certain sens « un », peut-on lire chez Russell, c'est ce qui est naturellement incontestable. Mais il ne s'ensuit pas que l'on présuppose le concept de « un » lorsque nous parlons d'un individu. Nous pouvons inverser le rapport et voir dans le concept d'individu le concept fondamental d'où est dérivé le concept de « un ».

[25] Cf. Russell qui définit le nombre à partir du concept de classe. Le nombre 3 n'est en effet pas la même chose que « le trio constitué par Brown, Jones et Robinson ». Ce nombre est quelque chose que tous les groupes (ou collections) de trois ont en commun. Mais plutôt que de « groupe » ou de « collection », Russell préfère parler de « classe » (cf. *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit.*, p. 53).

ordinal et nombre cardinal (et Natorp le concède) soient tous deux conceptuellement différents « est tout aussi évident que le fait qu'est en même temps donnée avec chacune de ces manières de poser le nombre la possibilité de l'autre […]. Cependant, là où il y a un premier élément, il y a nécessairement aussi, d'après le nombre, un « un » ; c'est précisément un premier élément, mais un seul un, et là où il y a un deuxième élément, il y a (parce qu'en tout cas il y a aussi un premier) nécessairement deux, et ainsi de suite » (*Fondements* 3, § 2[26]). ~~Là contre~~ Sur ce point, l'on ne peut dire qu'une chose, justement que cela constitue – ce qui devrait en tout cas être évité – la fondation de la théorie des ensembles, où cette fois les places des nombres fonctionnent en tant qu'ensembles. Il semble donc que les deux théories dépendent l'une de l'autre : l'une ne suffit pas pour parvenir jusqu'au nombre, l'autre ne repousse justement pas assez loin le concept de nombre. ~~Précisément~~

Mais précisément dans ce en quoi les deux théories pêchent apparaît le plus clairement leur visée propre. S'il s'agit de fonder, ce fondement ne signifie rien d'autre qu'une réduction à des concepts logiquement plus simples[27]. Il est évident qu'une telle réduction ne peut aller à l'infini **5/**. Il faudra donc en rester à un certain nombre de concepts fondamentaux et de principes. Mais si notre regard se porte sur les différents systèmes exposés par différents mathématiciens comme Peano, Russell, Hilbert, ~~c'est une revendication tout à fait compréhensible de la pensée de reconnaître~~ on reconnaît comme un problème incontournable la question de la réductibilité d'un système à l'autre. Il faut seulement se décider en quel sens on peut exiger cette réduction. Tous trois parlent de fondements des mathématiques. Et il est tout à fait évident qu'il s'agit d'une fondation logique par rapport à des tentatives psychologiques ou sensualistes quelles qu'elles soient[28]. Il faut seulement se demander jusqu'où ce fondement remonte à ce qui est purement logique et ce qu'il en est de l'identité ou de ~~l'égalité partielle ou recouvrement~~ [sic] la

[26] Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig/Berlin, Teubner, 1910 (*Les Fondements logiques des sciences exactes*, non traduit, à l'exception du chap. V, « Direction et dimension en tant que déterminations du nombre pur », in : E. Barot et J. Servois [Dir.], *Kant face aux mathématiques modernes*, Paris, Vrin, 2009, pp. 211- 241). Le § 2 du Troisième chapitre (« Zahl und Rechnung ») s'intitule « Ordnungszahl und Anzahl », où *Anzahl* est à prendre, comme chez Dedekind, au sens de nombre cardinal d'un ensemble (fini ou infini).

[27] Cf. exemplairement Russell dans *The Principles of Mathematics*, *op. cit*. : « Toutes les mathématiques pures traitent exclusivement de concepts définissables à partir d'un tout petit nombre de concepts logiques fondamentaux ».

[28] Cf. les objections mentionnées dans l'Introduction contre le sensualisme et le psychologisme.

dépendance, qui est affirmée par Russell et Couturat ainsi que par Natorp, du reste selon des points de vues très différents. Pour trouver d'abord une délimitation du côté des mathématiques, nous nous tournons vers cette forme d'examen qui, à l'inverse de toutes les tentatives orientées logiquement pour l'essentiel, part purement de l'intérêt intrinsèque des mathématiques et ne prétend d'ailleurs nullement mettre en évidence quelque chose de logiquement dernier en dehors de la démonstration mathématique – à savoir l'axiomatique telle que Hilbert la représente. « Il ne suffit pas » – et c'est ce que l'on peut peut-être concevoir comme programme – « d'éviter des contradictions existantes si la réputation des mathématiques, menacée par celles-ci, doit être ici rétablie comme modèle de science la plus rigoureuse : l'exigence principielle de la théorie axiomatique doit au contraire aller plus loin, et ce, en reconnaissant qu'à chaque fois dans le cadre d'un domaine du savoir des contradictions sont tout à fait impossibles en raison du système axiomatique établi. » (*Pensée axiomatique*, p. 411 – Annales math[ématiques], vol. 78, 1918 [29]). Montrer l'impossibilité de telles contradictions est la tâche d'une démonstration, mais qui, et Hilbert le reconnaît lui-même très clairement (*Fondements logiques de la m*[*athématique*], A[nnales] m[athématiques], vol. 88, p. 153 et *Nouveau fondement de la m*[*athématique*] p. 165)[30], ne relève plus des mathématiques à proprement parler, mais d'une science qu'il appelle métamathématique. Et voici maintenant exposé brièvement le déroulement de la démonstration : nous formalisons l'ensemble complet des mathématiques et montrons que, pour parvenir à toutes les formules, nous nous en sortons avec un certain nombre de principes qui engendrent à leur tour tout le reste à partir de certains principes. Toute réflexion de contenu est retirée des mathématiques ainsi formalisées et transférée dans le domaine de la métamathématique. – On peut ~~en fait~~ dire que la preuve de l'absence de contradiction est presque complète. On ne décrira cependant pas ici la procédure proprement dite. Mais considérons le système axiomatique tel qu'il est présenté dans la publication peut-être la plus importante (A[nnales] m[athématiques], vol. 88) : le groupe IV, axiomes du nombre : $a + 1 \neq 0; \delta (a + 1) = a$ montre avec une parfaite clarté ce à quoi on doit appliquer la réduction. Si ~~ici~~ le concept de nombre est présupposé dans les derniers principes, il n'y a, du côté des mathématiques, par contre rien à objecter ; car en fait si on

[29] Fondée en 1868, la revue d'Alfred Clebsch et de Carl Neumann, les *Annales mathématiques*, était à l'époque la revue spécialisée la plus importante. Hilbert en était l'un des rédacteurs.

[30] David Hilbert, *Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung*. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol., 1, 1922, pp. 157-177.

signale aux mathématiques qu'elles ne sont jamais prises dans des contradictions avec le nombre, dans la mesure où elles conçoivent et utilisent ce dernier conformément à ces axiomes, toute exigence purement mathématique est alors entièrement satisfaite. On pourrait dire à bon droit que par là nous serait donnée une logique mathématique si l'on se décidait à concevoir la logique comme la somme des principes et concepts d'où doit être déduit le système de toutes ces propositions; naturellement, il faut avouer là que cette somme n'est à aucun moment absolument complète puisque, c'est connu, des contingences, quelles qu'elles soient, peuvent mener à de nouveaux principes pour le fondement desquelles est nécessaire l'introduction de nouveaux axiomes. Mais comme on peut toujours à nouveau fournir la preuve de compatibilité, il n'y a pas là de difficulté principielle et insurmontable. Mais seulement, la question de Russell p. ex. se pose ~~en son principe~~ autrement. Il ne s'agit pas pour lui, ou seulement en partie, d'empêcher que les mathématiques s'empêtrent dans des contradictions. Le but propre est bien plutôt de montrer l'identité des mathématiques et de la logique **6/** : la logique est la jeunesse des mathématiques et les mathématiques sont la virilité de la logique.[31] – Si toutefois p. ex. Natorp, qui – on le sait – prétend que les mathématiques proviennent purement de la pensée[32], se défend contre cette identification, il semble alors nécessaire de présenter un peu plus exactement le sens que Russell et Couturat associent avec le terme de logique.

On vient de le voir avec Hilbert, et on pourrait tout aussi bien le montrer à propos de l'axiomatique de Peano, que les mathématiques, certes, peuvent seulement être garanties grâce à la pensée logique contre toutes sortes de contradictions et de paradoxes, mais sans qu'elles soient cependant ramenées à des fondements logiques. Cependant, il n'y a naturellement pas lieu ici de s'en contenter. On peut de surcroît essayer de réduire le nombre de principes et de concepts fondamentaux à un minimum, mais un minimum pris en

---

[31] Cette dernière phrase est une citation silencieuse de Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit.*, p. 357 : « Au cours de l'histoire, les mathématiques et la logique ont eu longtemps des destins séparés. […] Il est devenu impossible de tracer une nette ligne de démarcation entre les deux; elles sont devenues une seule et même discipline. Elles diffèrent comme l'enfant et l'homme fait : la logique est la jeunesse des mathématiques, les mathématiques sont de la logique à l'âge adulte ».

[32] En mettant l'accent chez Kant sur le moment de l'entendement, et non de la sensibilité, Natorp a fait apparaître le nombre comme étant à l'origine de la pensée pure : « Il ne peut rien y avoir pour la pensée de plus originaire que la pensée même, autrement dit la position de relation. Tout autre fondement qu'on prétend assigner au nombre implique cette même position de relation […] » (cf. *Les Fondements logiques*, *op. cit.*, p. 99).

un autre sens que celui de Hilbert ~~ou Peano~~. Avec Natorp p. ex., on peut s'enquérir des fonctions originelles de la pensée d'où résultent ordre et nombre[33], ou l'on peut problématiser avec Russell la question de savoir comment il me faut définir nombre et ordre et ce qui est requis pour cette définition. Naturellement, de cette manière, des concepts – et ainsi également des principes –, qui sont irréductibles chez Hilbert, sont réductibles, et ce, à quelque chose qui ne se trouve plus dans le domaine mathématique, mais dans le domaine métamathématique. – ~~Mais~~ De quelle sorte sont donc les concepts sur lesquels Russell et Couturat font en fin de compte tout reposer ? Les concepts d'ensemble, d'individu, de propriété, de relation d'influence entre des jugements, dont on part, ne sont nullement des concepts premiers au sens d'une logique transcendantale. Ce sont des concepts premiers tout au plus pour ~~le~~ un fondement des mathématiques, mais qui ne peut pas prétendre s'appeler logique, dès lors qu'on cherche une logique de l'origine. Mais ce n'est pas non plus ce qu'ils revendiquent. En effet, le concept de logique qui est à leur fondement n'est certes pas celui de la logique aristotélicienne, laquelle est ici au contraire conséquemment consolidée et élargie, mais c'est le concept d'une logique formelle. Russell pose la question de savoir ce qu'est l'objet que nous pouvons aussi bien appeler mathématique ou logique et indique comme caractéristiques immédiates Γ de sa quête / qu'il ne s'agit pas d'objets particuliers ni de propriétés particulières, que notre but est la déduction formelle, que nous avons à faire à la forme de la proposition, que nous nous enquérons de certaines constantes logiques[34] et d'autres choses de ce genre. En fait, si la logique est comprise comme ici, on ne peut alors donner de réponse à la question des limites entre mathématiques et logique ; car réellement, vus d'ici, les concepts fondamentaux des mathématiques se développent en réalité continûment à partir des concepts logiques. – ~~Ce n'est pas la tâche de cet exposé de peser les avantages et désavantages de la logique formelle comme théorie des formes de la pensée par rapport à une autre théorie traitant des conditions de l'objectivité [35], mais la~~

[33] Paul Natorp, *Les Fondements logiques*, *op. cit.*, chapitre I, § 6, « Le principe de l'origine », pp. 22-26. Natorp vise en fait ce que Kant avait visé avec le concept de synthèse, mais Natorp trouve l'expression peu heureuse, car du fait qu'elle s'oppose à analyse, elle n'est pas dernière. Or, ce que poursuit Natorp, c'est une unité plus originelle, unité qui servirait de fondement à l'édifice logique.

[34] Pour Russell, supposer des « constantes logiques » et des variables suffit à garantir le concept de nombre. Le nombre n'est en effet pas la propriété d'un objet perceptible.

[35] Cette théorie « traitant des conditions de l'objectivité » se réduit à un minimum logique instaurant la différence entre identité et altérité ou entre unité et pluralité. En dehors de ces oppositions, aucune objectivité n'est pensable. Mais cela ne suffit cependant pas pour construire les concepts de l'un, de quantité ou de série des nombres.

~~différence doit seulement,~~ **Γ** Ce concept de logique doit cependant **/** être maintenu afin que des bases conformes à ce sens soient disponibles pour l'évaluation. Quand p. ex. Aloys Müller (*L'objet des math*[*ématiques*], p. 47)[36], en partant du point de vue de Rickert, ~~que l'on peut appeler transcendantal en un certain sens,~~ soulève contre Russell l'objection que le nombre chez lui n'est pas dérivé de concepts logiques[37], mais de concepts théoriques de relations[38], ce reproche serait pour Russell purement incompréhensible[39]. Le fondement logique qu'il veut livrer et qu'il rend aussi en son sens, ce qui se comprend, n'a pas la prétention d'exhiber de quelconques concepts derniers au sens transcendantal. Leur opérativité réside bien plutôt, et doit résider, dans ce que s'effectue une construction du nombre. Si là-contre l'on dit avec Müller que le nombre est un objet dans un milieu homogène[40] (ce qu'est un milieu homogène, on ne peut le préciser davantage) et qu'il a un caractère quantitatif **7 /** (pour savoir ce qu'est la quantité, il faut l'avoir vécue ! [Rickert, p. 68][41]), cela constitue une problématique qui en soi – abstraction faite de son caractère tenable ou non – n'entre pas le moins du monde en collision avec la manière de travailler de Russell, et l'on pourrait même dire qu'elle ne trouve avec elle aucun point de rencontre. En effet, d'un côté, on veut une description, de l'autre, une construction du nombre.

---

[36] Aloys Müller, *Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie* (*L'objet des mathématiques envisagé sous son rapport particulier à la théorie de la relativité*), Braunschweig, Vieweg, 1922.

[37] Il s'agit de l'article « Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik der Zahlbegriffe », *Logos*, II, 1911, pp. 26-78, où Rickert affirme que le nombre n'est pas réductible à des prémisses logiques, ce qui lui fait dire peut-être imprudemment qu'il est « alogique ». En fait, Rickert retient quand même un minimum logique représenté par les catégories de l'identité et de la différence, qui permettent de penser une objectivité.

[38] Müller argumente ici en ayant recours à la notion développée par ledit « idéalisme logique » de Natorp, celle de « position de relation » (cf. note 32).

[39] L'incompréhension vient de ce que Russell et Rickert ne définissent pas de la même manière la logique. Pour Rickert, la logique s'épuise dans une opposition de style parménidien entre identité et différence et ce minimum est défini comme « l'objet purement logique ». Ce qui va à l'encontre de toute la logique moderne d'un Russell qui est une logique du calcul symbolique, logique qu'il a systématisée avec son collègue Whitehead.

[40] Müller reprend ici Kant qui définissait le nombre comme un schème pur de la quantité considérée comme catégorie : on additionne successivement unité par unité. Le nombre est « l'unité de la synthèse du divers dans une intuition homogène en général » du fait que la conscience produit le temps dans l'intuition (*Critique de la raison pure*, 2e éd., 1787).

[41] De quel ouvrage de Rickert s'agit-il ici ? On n'a trouvé nulle trace de cette formule, mais, si l'on s'appuie sur *Die Philosophie des Lebens. Darstellung und Kritik der philosophischen Modeströmungen unserer Zeit*, Tübingen, 1920, *System der Philosophie*, Tübingen, 1921, ou encore *Logique des sciences naturelles et logique de la culture* (Paris, Gallimard, 1997), l'idée est que pour Rickert la quantité, traitée mathématiquement, l'est de manière homogène, alors que tout *quantum* est dans la vie réelle vécu comme hétérogène.

Ainsi on a, implicitement, obtenu la réponse à notre question des limites entre mathématique et logique : du point de vue de la logique formelle, on ne peut en tout cas indiquer une nette différence. Mais si l'on considère les *Fondements logiques* de Natorp, il semble que du point de vue de la logique des origines il ne serait pas non plus possible de dire jusqu'où va la logique et où débute la science particulière. Car on a précisément à faire ici à la tentative de déduire le nombre, et même plus encore, les opérations faites avec les nombres, de concepts purement logiques comme celui de relation. On a déjà tenté auparavant de montrer que la manière dont se donne cette déduction contient des facteurs, à savoir le concept d'ensemble, qui ne sont pas utilisés en tant que tels. Mais on peut certainement encore aller plus loin et demander si, effectivement, est déjà donnée, avec les concepts de *referendum* et de *relatum* [42] ainsi qu'avec l'unité de relation à partir des deux, la suite ordinale des nombres en tant que telle, et si au fond le motif transcendantal de l'ordre n'est pas plutôt pris ici en un sens beaucoup trop particulier. Pour finir, on dira que le fondement mathématique des mathématiques et son fondement logique, dans la mesure où ils sont conçus correctement, ne s'opposent ni ne se font concurrence. La logique devra se limiter à exhiber la signification du nombre dans le système fonctionnel du penser, et le fondement des mathématiques ne pourra pour elle que consister à indiquer sa place à cette fonction. On devra laisser aux mathématiques elles-mêmes le fondement au sens de la garantie technique ainsi que de la construction effective, c'est-à-dire d'une construction créant du particulier[43].

~~Mais~~ Si maintenant nous posons ~~considérons~~ encore une fois la question de la réductibilité des différents fondements, la confusion avec ce qui a été dit jusqu'ici est apparemment arrivée à son point extrême : deux sortes de logique donnent deux sortes de fondement et chacune a besoin de l'autre pour atteindre son but. La théorie cardinale présuppose le concept d'ordre dans le concept de l'un et l'autre éléments de l'ensemble, de l'un et l'autre ensembles. – La théorie ordinale utilise la notion d'ensemble pour parvenir au nombre à

[42] La classe des maris est disjointe de celle des épouses. Dans ce cas, on peut considérer un terme comme l'un de ceux dont part la corrélation ou bien comme l'un vers lequel elle va. Le *référent* désigne l'objet dont part la relation et le *relatum* l'objet vers lequel elle va. Ainsi, si *x* est le mari et *y* la femme, *x* est le *référent* et *y* le *relatum* relativement à la relation « mari de », mais par rapport à « épouse de », c'est *y* le *référent*, *x* le *relatum* (cf. Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, *op. cit.*, p. 113).

[43] Tout le paragraphe que l'on vient de lire à partir donc de « Ainsi on a » est barré par une ligne transversale.

partir de l'emplacement ordinal. – Une chose est en tout cas claire et qui est leur but commun : le concept de nombre doit être produit purement à partir de la pensée[44], et non pas en s'appuyant sur un élément empirique quelconque de l'espace, des objets, des actes psychiques ou d'autres données encore[45]. Mais c'est précisément ce but commun qui offre la possibilité de juger. Si auparavant l'on a appelé formelle la logique de Russell, on peut donner un complément à cette caractérisation : elle est, selon son essence, logique de l'abstraction. Le concept de nombre a été abstrait à partir de celui d'équinuméricité – mais l'objection qu'il faut soulever contre toute théorie de l'abstraction, à savoir que le point de référence en vue duquel on abstrait doit être donné auparavant, n'est-elle donc pas ici recevable ? En fait, il faut qualifier de violent l'acte consistant à d'abord faire abstraction de ce qui fait l'essence du nombre – l'ordre du système – ainsi qu'à construire d'abord quelque chose qui se présente comme propriété **8 /** d'ensembles, mais dont personne ne pourrait dire ce que ce serait si n'apparaissait pas le nom de nombre dans la définition. Le fait qu'ici la définition soit conçue de manière à la limiter dans son usage est incontestable. Certes, si définir veut dire exprimer un concept inconnu par des concepts connus qui se trouvent en des relations connues, tout est alors ici bien défini, et si l'objectivité ~~vraie~~ du concept réside dans son adéquation avec l'objet, ces concepts sont alors objectifs puisqu'ils sont, comme on le voit, abstraits des objets. Mais, précisément, les mathématiques constituent l'instance la plus importante contre cette conception du concept, et c'est justement avec le concept mathématique qu'apparaît l'erreur consistant à négliger les caractères distinctifs, car ici le concept le plus étendu est précisément le plus riche, comme l'atteste p. ex. le fait que les nombres rationnel et irrationnel sont tous deux contenus entièrement dans le nombre réel. Et Russell lui-même le concède implicitement quand il définit l'ensemble par une propriété. Ce qui est ainsi exigé et reconnu n'est rien d'autre que le concept d'origine. Car, si l'on concède pour l'ensemble que la propriété n'est pas ~~produite~~ abstraite de l'objet, mais qu'au contraire c'est la fonction de pensée qui produit l'objet, on ne peut alors pas voir pourquoi l'on conteste la légitimation ~~pour~~ de cette idée pour la construction du nombre. Ce qu'en effet Dedekind nous livre ~~n'~~est précisément ~~rien~~ ceci que le système des nombres est le système de l'ordre – différenciation et ordre sont les facteurs fondamentaux qui contiennent

[44] Cette conception est proche de celle de Gauss: « Le nombre est un pur produit de notre esprit » (Lettre à Bessel du 8 avril 1830).
[45] Cf. les objections mentionnées dans l'Introduction contre le sensualisme et le psychologisme.

tout le reste en eux et, tant s'en faut que les nombres aient besoin de quelque chose dont ils devraient être abstraits, la forme sous laquelle ils renvoient réciproquement à leur place suffit pour décrire leur sens. – Pour le fondement logique des mathématiques, l'important est la chose suivante : il ne s'agit pas de former des concepts d'abstraction et des définitions d'où l'on tire après ce que l'on y a mis auparavant, mais la tâche est d'exhiber les fonctions d'où résultent les concepts et de consolider leur objectivité en prouvant leur importance et leur opérativité dans le système de la science. La logique n'a toutefois ainsi pas à réaliser le fondement mathématique, lequel a, selon sa pleine essence, d'autres tâches à accomplir ; car, si le point de départ est le fait de la science[46], le matériel ne peut alors pas être créé ou changé dans cette autoréflexion – seules les orientations et les couches de l'objectivité peuvent être caractérisées. Mais du fait que la construction technique – s'il est permis d'employer ce mot – est confiée au travail de la science, on reconnaît que deux directions de fondement sont possibles et justifiées. La question de savoir si c'est la théorie ordinale ou la théorie cardinale qui est la plus utile pour les mathématiques est une question mathématique –, du côté de la logique, l'on peut seulement dire que le concept de fonction, tel que l'emploie la déduction dedekindienne, doit être mis également au fondement de la théorie des ensembles comme étant vraiment plus originel, au cas où les mathématiques, comme il semble, se décideraient pour celle-ci – c'est seulement ainsi que l'on pourra parler à juste titre de fondement logique.

[46] Weil se réfère ici au fameux « fait de la science » néokantien (cf. notre Présentation).